

INTRODUCCIÓN



En esta unidad, comprenderemos la diferencia existente entre el interés simple y el interés compuesto; las tasas de interés nominal, equivalente y efectiva en un periodo anual; y que la mayoría de las operaciones financieras se realizan con interés compuesto con el fin de que los intereses liquidados no entregados (en inversiones o créditos) entren a formar parte del capital, y, por tanto, que, en periodos subsecuentes, también generarán intereses. Este fenómeno se conoce con el nombre de **capitalización de intereses** y forma el interés compuesto.

Aprenderemos y aplicaremos el interés compuesto en el cálculo de capital, monto, intereses, tasa de interés, tiempo, así como en la reestructuración de deudas.



2.1. Concepto

La gran mayoría de las operaciones financieras se realizan a interés compuesto con el objeto de que los intereses liquidados no entregados entren a formar parte del capital y, para próximos periodos, generen a su vez intereses. Este fenómeno se conoce con el nombre de **capitalización de intereses**.

Al invertir un dinero o capital a una tasa de interés durante cierto tiempo, nos devuelven ese capital más los beneficios o intereses, que entonces se llama *monto*. Cuando los intereses no se retiran y se acumulan al capital inicial para volver a generar intereses, se dice que la inversión es a interés compuesto.

El *interés compuesto* se da cuando, al vencimiento de una inversión a plazo fijo, no se retiran los intereses, se presenta un incremento sobre el incremento ya obtenido, se tiene interés sobre interés. En los créditos, generalmente se utiliza el interés



compuesto; aunque las instituciones digan que manejan interés simple, son contados los casos en que se utiliza el interés simple. El *periodo de capitalización* es el tiempo que hay entre dos fechas sucesivas en las que los intereses son agregados al capital. La *frecuencia de capitalización* es el número de veces por año en los que los intereses se capitalizan.

El interés compuesto tiene lugar cuando el deudor no paga, al concluir cada periodo que sirve como base para su determinación, los intereses correspondientes. Así, provoca que los mismos intereses se conviertan en un capital adicional que a su vez producirá intereses (es decir, los intereses se capitalizan para producir más intereses).



Cuando el tiempo de la operación es superior al periodo al que se refiere la tasa, los intereses se capitalizan: nos encontramos ante un problema de interés compuesto y no de interés simple. En la práctica, en las operaciones a corto plazo, aun cuando los periodos a que se refiere la tasa sean menores al tiempo de la operación y se acuerde que los intereses sean pagaderos hasta el fin del plazo total, sin consecuencias de capitalizaciones, la inversión se hace a interés simple.



Por eso, es importante determinar los plazos en que van a vencer los intereses para que se puedan especificar las capitalizaciones, y, en consecuencia, establecer el procedimiento para calcular los intereses (simple o compuesto).

Como los resultados entre el interés simple y el interés compuesto no son los mismos, debido a que en este último la capitalización de los intereses se hace con diferentes frecuencias y manteniendo la proporcionalidad en las diferentes tasas de interés. Haremos la conversión de la tasa de interés equivalente: nominal a efectiva, lo que nos indica la tasa real que se paga en dichas operaciones.

Cuando no se indican los plazos en que se deben llevar a cabo las capitalizaciones, se da por hecho que se efectuarán de acuerdo con los periodos a los que se refiere la tasa. En caso de que la tasa no especifique su vencimiento, se entenderá que es anual y las capitalizaciones, anuales.



El interés compuesto es una herramienta en el análisis y evaluación financiera de los movimientos del dinero, es fundamental para entender las matemáticas financieras, con su aplicación obtenemos intereses sobre los intereses, esto significa la capitalización del dinero a través del tiempo. Se calcula el monto del interés sobre la

base inicial más los intereses acumulados en períodos previos, es decir, los intereses que se reciben se vuelven a invertir para ser un capital nuevo.



Si al terminar un periodo en una inversión a plazo fijo, no se retira el capital ni los intereses, entonces, a partir del segundo periodo, los intereses ganados se integran al capital inicial, formándose un nuevo capital para el siguiente periodo, el cual generará nuevos intereses y así sucesivamente. Se dice, por lo tanto, que

los intereses se capitalizan, por lo que el capital inicial no permanece constante a través del tiempo, ya que aumentará al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados, de acuerdo con una tasa convenida. Cuando esto sucede, decimos que las operaciones financieras son a **interés compuesto**.

El **interés simple** produce un crecimiento lineal del capital; por el contrario, un capital a interés compuesto crece de manera exponencial.



Interés compuesto

Como ya se señaló, el interés es un índice expresado en porcentaje, es la cantidad que se pagará por hacer uso del dinero ajeno. Nos indica cuánto se tiene que pagar en caso de crédito o cuánto se gana en caso de inversión.



El interés compuesto se refiere al beneficio del capital original a una tasa de interés durante un periodo, en donde los intereses no se retiran, se reinvierten.

Monto	Capital	Periodo de capitalización
<ul style="list-style-type: none">• El capital futuro es el monto de una operación a interés compuesto y es la cantidad que se acumula al final del proceso o lapso considerado, a partir de un capital inicial sujeto a determinados periodos de capitalización de intereses.	<ul style="list-style-type: none">• Es el valor presente o <i>actual</i> de una operación a interés compuesto, es el capital inicial calculado a partir de un monto futuro, considerando cierto número de periodos de capitalización de intereses.	<ul style="list-style-type: none">• El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama periodo de capitalización o periodo de conversión. Así, si una operación se capitaliza semestralmente, quiere decir que cada seis meses los intereses generados se agregan al capital para generar nuevos intereses en los siguientes periodos. De igual forma, al decir que un periodo de capitalización es mensual, se está indicando que al final de cada mes se capitaliza el interés generado en el transcurso del mes.

El interés puede capitalizarse en periodos anuales, semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales, mensuales, semanales, quincenales, etc. y al número de veces que el interés se capitaliza en un año se le llama **frecuencia de conversión** o **frecuencia de capitalización**.

Un gran número de operaciones en el medio financiero se trabajan a interés **compuesto** cuando son a plazos medianos o largos.



Tasas equivalentes

Como los resultados entre el interés simple y el interés compuestos no son los mismos, debido a que en éste último la capitalización de los intereses se hace con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en las diferentes tasas de interés; por tanto, se convertirá la tasa de interés equivalente: nominal a efectiva, de lo que resultará la tasa real que se paga en dichas operaciones.

Para lograr que, cualquiera sea la frecuencia de capitalización, el valor final sea el mismo, es menester cambiar la fórmula de equivalencia de la tasa de interés.

En créditos, el pago de los intereses es al vencimiento o por anticipado; en inversiones, siempre es al vencimiento. El interés nominal, por lo general, condiciona la especificación de su forma de pago en el año. Para determinar a qué tasa de interés equivalen los intereses pagados o por cubrir, se debe tomar en cuenta que éstos deben reinvertirse, generando, a su vez, intereses.

La tasa efectiva anual (TEA), aplicada una sola vez, produce el mismo resultado que la tasa nominal, según el período de capitalización. La tasa del período tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva.

Tasa nominal

La tasa nominal es el interés que capitaliza más de una vez por año. Esta tasa la fija el Banco de México de un país para regular las operaciones activas (préstamos y créditos) y pasivas (inversiones, depósitos y ahorros) del sistema financiero. Siendo la tasa nominal un límite para ambas operaciones y como su empleo es anual resulta equivalente decir tasa nominal o tasa nominal anual.

Tasa efectiva

La tasa efectiva es aquella a la que realmente está colocado el capital. La capitalización del interés en determinado número de veces por año, da lugar a una tasa efectiva mayor que la nominal. Esta tasa representa globalmente el pago de intereses, impuestos, comisiones y cualquier otro tipo de gastos que la operación financiera implique. La tasa efectiva es una función exponencial de la tasa periódica.



Con el fin de conocer el valor del dinero en el tiempo, es necesario que las tasas de interés nominales sean convertidas a tasas efectivas. La tasa de interés nominal no es una tasa real, genuina o efectiva.

Nomenclatura

C	Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras <i>A</i> o <i>P</i> (valor presente).
M	Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de <i>C</i> .
J	Es la tasa nominal de interés calculada para un período de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.
I	Es la tasa de interés por período y representa el costo o rendimiento por período de capitalización de un capital, ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión <i>m</i> .
m	Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.
n_a	Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.
n	Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Para calcular el monto de un capital a interés compuesto, se determina el interés simple sobre un capital sucesivamente mayor, como resultado de que en cada periodo los intereses se van sumando al capital inicial.

Por **ejemplo**, el caso de un préstamo de \$10,000.00 a 18% anual en 6 años: para confrontar el funcionamiento respecto del interés simple, se compara ambos tipos de interés en la siguiente tabla:



	Interés compuesto	Interés simple
Capital inicial	\$10,000.00	\$10,000.00
Intereses en el 1º año	\$1,800.00	\$1,800.00
Monto al fin del 1º año	\$11,800.00	\$11,800.00
Intereses en el 2º año	\$2,124.00	\$1,800.00
Monto al fin del 2º año	\$13,924.00	\$13,600.00
Intereses en el 3º año	\$2,506.32	\$1,800.00
Monto al fin del 3º año	\$16,430.32	\$15,400.00
Intereses en el 4º año	\$2,957.46	\$1,800.00
Monto al fin del 4º año	\$19,387.78	\$17,200.00
Intereses en el 5º año	\$3,489.80	\$1,800.00
Monto al fin del 5º año	\$22,877.58	\$19,000.00
Intereses en el 6º año	\$4,117.96	\$1,800.00
Monto al fin del 6º año	\$26,995.54	\$20,800.00

Como se puede ver, el monto a interés compuesto es mayor por la capitalización de los intereses en cada uno de los plazos establecidos de antemano. Si se sigue este procedimiento, podemos encontrar el monto a interés compuesto; sin embargo, cuando el tiempo de operación es demasiado largo, esta misma solución puede tener errores.

Nota: Para estudiar el interés compuesto, se utilizan las mismas literales del interés simple, pero cabe hacer algunas observaciones importantes:



En este caso, el tiempo se mide por períodos de capitalización (número de veces que los intereses se convierten o suman al capital en todo el plazo que dura la operación).

- Se debe tomar en cuenta, nuevamente, que tanto la variable tiempo —que de aquí en adelante se le puede llamar periodo de capitalización (n)— como la de tasa de interés (i) se manejen en la misma unidad de tiempo.

- En la tasa de interés pueden aparecer las palabras **convertible, compuesto, nominal con capitalización o capitalizable**, que se toman como sinónimos e indican el número de veces que se capitalizarán los intereses en un año (frecuencia de conversión).



2.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo

Fórmulas con interés compuesto

Se conoce el capital, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo:

MONTO	
Monto futuro	$M = C(1 + i)^n$
Tasa por periodo de capitalización	$i = \frac{J}{m}$
Núm. de periodos de capitalización	$n = n_a \times m$

CAPITAL	
Capital	$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$
o también:	$C = M(1 + i)^{-n}$
en donde:	$i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

CAPITAL EN FUNCIÓN DEL INTERÉS
$C = \frac{I}{(1 + i)^n - 1}$
$\text{Capital} = C = \frac{M}{(1 + i)^n}$
$\text{tiempo} = n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)} = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1 + i)}$
$\text{tasa de interés} = i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$
donde:
$m = \text{tiempo}$
$n = \text{periodos de capitalización en un año}$

**Capital en función del interés:**

Ejercicio 1	
El 18% convertible mensual indica que el 18% que está en forma anual debe ser convertido a forma mensual.	<p>Esto se realiza dividiendo el porcentaje entre 12 (número de meses del año): $0.18/12$</p> $\frac{0.18}{12} = 0.015 \text{ mensual}$ <p>Si es capitalizable trimestralmente, el resultado es $0.18/4$:</p> $\frac{0.18}{4} = 0.045 \text{ mensual}$

Ejercicio 2	
El 24% con capitalización: a) Quincenal b) Cuatrimestral c) Mensual d) Semestral	<p>a) $\frac{0.24}{24} = 0.01$</p> <p>b) $\frac{0.24}{3} = 0.08$</p> <p>c) $\frac{0.24}{12} = 0.02$</p> <p>d) $\frac{0.24}{2} = 0.12$</p>

**Ejercicio 3**

El 36% con capitalización y tiempo:

a) Mensual en 8 meses

$$a) \quad \frac{0.36}{12} (8) = 0.24$$

b) Semanal en 5 meses

$$b) \quad \frac{0.36}{52} (20) = 0.1384$$

c) Trimestral en nueve meses

$$c) \quad \frac{0.36}{4} (3) = 0.27$$

Ejercicio 4

¿Cuánto capital producirá un interés compuesto de \$139,940.57 a los 4 años y a la tasa de 2% bimestral?

Datos:

$$I = 139,940.57$$

$$i = 0.02$$

$$m = 6$$

$$n_a = 4$$

$$n = (n_a) (m) = (4) (6) = 24$$

Fórmula:
$$C = \frac{I}{(1+i)^{n-1}}$$

Solución:
$$C = \frac{139,940.57}{(1+0.02)^{24}-1} = 230,000$$



Ejercicio 5

¿Cuál es el capital de un valor acumulado de \$924,138.14 invertido durante 12 años a 22% anual?

Fórmula: $C = M(1+i)^{-n}$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$M = 924,138.14$$

$$J = 0.22$$

$$m = 1$$

$$n_a = 12$$

Solución: $i = \frac{0.22}{1} = 0.22 \quad n = 1 \times 12 = 12$

$$A = 924,138.14(1+0.22)^{-12} = 85,000.00$$

Ejercicio 6

¿Qué capital produce un monto de \$380,000.00 a los 6 años si la tasa es 3.5% trimestral?

Fórmula: $C = M(1+i)^{-n}$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$M = 380,000.00$$

$$i = 0.035$$

$$m = 4$$

$$n_a = 6$$

Solución: $n = 4 \times 6 = 24$

$$A = 380,000.00(1+0.035)^{-24} = 166,423.71$$

Ejercicio 7

Calcular el valor actual de un capital futuro de \$7,500.00 con vencimiento en 4 años si la tasa de interés es de 14.0%:

- a) Con capitalización mensual b) Con capitalización bimestral
 c) Con capitalización trimestral d) Comparar resultados



a) Capitalización mensual

$C = M(1 + i)^n$ $i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$	
	$M = 7,500$ $J = 0.14$ $m = 12$ $n_a = 4$
	$i = \frac{0.14}{12} = 0.011667 \quad n = 4 \times 12 = 48$ $A = 7,500(1 + 0.011667)^{-48} = 4,297.58$

b) Capitalización bimestral

$C = M(1 + i)^n$ $i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$	
$M = 7,500$ $J = 0.14$ $m = 6$ $n_a = 4$	
$i = \frac{0.14}{6} = 0.023333 \quad n = 4 \times 6 = 24$ $A = 7,500(1 + 0.023333)^{-24} = 4,311.72$	

$C = M(1 + i)^n$ $i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$	
	$M = 7,500$ $J = 0.14$ $m = 4$ $n_a = 4$
	$i = \frac{0.14}{4} = 0.035 \quad n = 4 \times 4 = 16$ $A = 7,500(1 + 0.035)^{-16} = 4,325.29$

Interpretación: La diferencia entre una capitalización bimestral respecto de una mensual es del 0.32%; la trimestral respecto a la bimestral es de un 0.315%; la trimestral respecto a una mensual es del 0.635%.


Fórmulas para calcular el monto de intereses de una inversión a interés compuesto:

$$I = C [(1 + i)^n - 1]$$

Ejercicio 8

Apliquemos la fórmula anterior: ¿cuál es el monto de intereses de un capital de \$85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa de 22% durante 12 años?



$I = C[(1 + i)^n - 1]$ $i = \frac{j}{m} \quad n = n_a \times m$							
Datos	$M = 85,000.00$ $i = 0.22$ $m = 1$ $n_a = 12$						
 Procedimiento	$n = 12 \times 1 = 12$ $I = 85,000.00[(1 + 0.22)^{12} - 1] = 839,138.14$ A continuación, comprobemos el resultado anterior: <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 70%;">Monto según el ejercicio 1</td> <td style="text-align: right;">924,138.14</td> </tr> <tr> <td>Menos capital propuesto</td> <td style="text-align: right;">85,000.00</td> </tr> <tr> <td>Interés según resolución anterior</td> <td style="text-align: right;">839,138.14</td> </tr> </table>	Monto según el ejercicio 1	924,138.14	Menos capital propuesto	85,000.00	Interés según resolución anterior	839,138.14
Monto según el ejercicio 1	924,138.14						
Menos capital propuesto	85,000.00						
Interés según resolución anterior	839,138.14						

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una inversión a interés compuesto

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \right] \times m$$

Siendo: $n = n_a \times m$

Ejercicio 9

Un capital de \$18,000.00 ha estado invertido durante 3 años, luego de los cuales dio un monto de \$26,000.00, ¿a qué tasa se celebró la operación?



Solución

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \right] \times m$	
 Datos	$M = 26,000.00$ $C = 18,000.00$ $m = 1$ $n_a = 3$ $n = 1 \times 3 = 3$
 Procedimiento	$J = \left[\sqrt[3]{\frac{26}{18}} - 1 \right] \times 1$ $J = 0.130404 = 13.04\%$

Ejercicio 10

Con un capital de \$9,500.00 se formó un monto de \$13,290.00 a los 2 años, ¿a qué tasa se hizo la inversión?



Solución

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \right] \times m$	
 Datos	$M = 13,290.00$ $C = 9,500.00$ $m = 1$ $n_a = 2$ $n = 1 \times 2 = 2$
 Procedimiento	$J = \left[\sqrt{\frac{13,290}{9,500}} - 1 \right] \times 1$ $J = 0.182771 = 18.3\%$



Ejercicio 11
Solución: a) Capitalización trimestral

Si de una inversión de \$50,000.00 se llegan a obtener \$80,000.00 al cabo de 5 años a una tasa de interés capitalizable trimestralmente:

- ¿Cuál es la tasa de interés nominal?
- ¿Cuál sería la tasa anual si se capitalizara semestralmente?
- Interpretación

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \right] \times m$	
 Datos	$M = 80,000.00$ $C = 50,000.00$ $m = 4$ $n_a = 5$ $n = 5 \times 4 = 20$
 Procedimiento	$J = \left[\sqrt[20]{\frac{80,000}{50,000}} - 1 \right] \times 4$ $J = 0.095114 = 9.51\%$

Solución: b) Capitalización semestral

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \right] \times m$	
 Datos	$M = 80,000.00$ $C = 50,000.00$ $m = 2$ $n_a = 5$ $n = 5 \times 2 = 10$
 Procedimiento	$J = \left(\sqrt[10]{\frac{80,000}{50,000}} - 1 \right) \times 2$ $J = 0.096245 = 9.62\%$

Interpretación: La diferencia entre una capitalización semestral respecto a una trimestral es de 0.11 ppc, o sea, el 1.16% más.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés compuesto

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{\text{Ln} \left(\frac{M}{C} \right)}{\text{Ln} (1 + i)} = \frac{\text{log} \left(\frac{M}{C} \right)}{\text{log} (1 + i)}$$

Se pueden utilizar en estos planteamientos tanto los logaritmos naturales como los logaritmos decimales.

Ejercicio 12

¿Dentro de cuánto tiempo un capital de \$25,600.00 a la tasa de 2.5% trimestral valdrá \$31,970.89?



Solución:

$n = \frac{\log \left(\frac{M}{C} \right)}{\log (1 + i)}$	
 Datos	$M = 31,970.89$ $C = 25,600.00$ $m = 4$ $i = 0.025$
 Procedimiento	$n = \frac{\log \frac{31,970.89}{25,600}}{\log(1 + 0.025)} = 9 \text{ trimestres}$

Ejercicio 13

¿Dentro de cuánto tiempo una persona que invirtió \$115,000.00 obtendrá \$139,179.87, como monto a la tasa de 1.75% bimestral?

Solución:

$n = \frac{\log \left(\frac{M}{C} \right)}{\log (1 + i)}$	
 Datos	$M = 139,179.87$ $C = 115,000.00$ $m = 6$ $i = 0.0175$
 Procedimiento	$n = \frac{\log \frac{139,179.87}{115,000.00}}{\log(1 + 0.0175)}$ $n = 11 \text{ Bimestres}$


Ejercicio 14



Si de una inversión de \$50,000.00 se llega a obtener \$58,235.00 a una tasa de 8.5% con capitalización mensual:

- Obtener el plazo de esta operación en años, meses, y días.
- Obtener el plazo si la capitalización se modifica a bimestral.
- Interpretar resultados.

Solución: a) Capitalización mensual

$n = \frac{\ln \left(\frac{M}{C} \right)}{\ln (1 + i)}$	 Datos	$M = 58,235.00$ $C = 50,000.00$ $m = 12$ $J = 0.085 \quad i = \frac{0.085}{12} = 0.007083$
	 Procedimiento	$n = \frac{\ln \frac{58,235}{50,000}}{\ln (1 + 0.007083)}$ $n = 21.600408 \text{ meses}$ $n = 1 \text{ año } 9 \text{ meses } 18 \text{ días}$

b) Capitalización bimestral

$n = \frac{\ln \left(\frac{M}{C} \right)}{\ln (1 + i)}$	 Datos	$M = 58,235.00$ $C = 50,000.00$ $m = 6$ $J = 0.085 \quad i = \frac{0.085}{6} = 0.014167$
	 Procedimiento	$n = \frac{\ln \frac{58,235}{50,000}}{\ln (1 + 0.014167)}$ $n = 10.838185 \text{ bimestres}$ $n = 1 \text{ año } 9 \text{ meses } 20 \text{ días}$

Interpretación: La diferencia es mínima de solo 2 días.